GENERALISATION DU PROBLEME 1075* (7)

Soit n un nombre positif entier > 1.
Trouver Card{x, $\eta(x) = n$}. L'on a noté par $\eta(x)$ la Fonction Smarandache: qui est définie pour tout entier x comme le plus petit nombre m tel que m! est divisible par x.

M. Costewitz, Bordeaux, France

SOLUTION DU PROBLEME**:
(Ce problème est dans un sens une généralisation du problème 1075, publié dans l'*Elemente der Mathematik**.)
Soit $n = r_1^{d_1} \ldots r_s^{d_s}$, la décomposition factorielle unique de ce nombre.

Calculons pour tout $1 \le i \le s$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} [\, n/r_i^j \,] = e_i \ge d_i \ge 1,$$ où [a] signifie la partie entière de a.

C'est-à-dire: n! se divise par $r_i^{e_i}$, pour tout $1 \le i \le s$.
Nous nottons par M l'ensemble demande.
Biensur,

$$\bigcup_{i=1}^{s} \{\, r_i^{e_i}, r_i^{e_i-1}, \ldots, r_i^{e_i-d_i+1} \,\} \subset M.$$

Nous nottons par R le membre gauche de l'inclusion antérieure, et par

$$R_i = \{\, r_i^{e_i}, r_i^{e_i-1}, \ldots, r_i^{e_i-d_i+1} \,\},$$

$R'_i = \{\, r_i^{e_i-d_i}, \ldots, r_i, 1 \,\}$, pour tous les i.

Soient $q_1, \ldots, q_t$ tous les nombres premiers différents entre eux,

plus petits que n, et non-diviseurs de n. Il est clair que ceux-ci sont tous différents de $r_1, \ldots, r_s$.

Construisons les suivantes suites finies:

$q_1, q_1^2, \ldots, q_1^{f_1}$, tels que $\eta(q_1^{f_1}) < n < \eta(q_1^{f_1+1})$;
.
.
.
$q_t, q_t^2, \ldots, q_t^{f_t}$, tels que $\eta(q_t^{f_t}) < n < \eta(q_t^{f_t+1})$;

$q_{t+1} > n;$
et

$$f_k = \sum_{j=1}^{\infty} [\, n/q_k^j \,], \text{ pour tous les } k.$$

Nous formons $q = \prod_{k=1}^{t} (1 + f_k)$ de combinaisons entre les nombres (éléments) de cettes suites, que nous réunissons dans un ensemble notté par Q.

Il est évident que chaque solution de l'équation $\eta(x) = n$ doit être de la forme: $a_i bc$, pour tous les i,

où $a_i \in R_i$, $b \in \left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} R_j \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} R'_j \right)$, $c \in Q$.

Donc, le nombre des solutions pour l'équation demandée est égale à

$$q \sum_{i=1}^{s} d_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} \left(e_j + 1 \right).$$

[*Voir: Aufgabe 1075 par Thomas Martin, "**Elemente der Mathematik**", Vol. 48, No.3, 1993]

[**Solution complétée par les éditeurs (C. Dumitrescu)]